الهندسة الفضائية :طرائق وأمثلة وتمارين محلولة

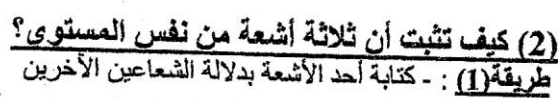
(1) كيف تثبت الإرتباط الخطي لشعاعين ؟

طريقة : التحقق أن مركبات الشعاعين متناسبة أو كتابة أحد الأشعة بدلالة الآخر

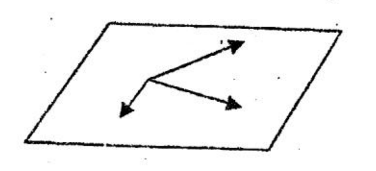
$\vec{v} = k \cdot \vec{u}$ أو $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

مثال : الشعاعان $\vec{u}\left(1,2,-\frac{1}{2}\right)$ و $\vec{v}\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ مرتبطين خطيا لأن $\vec{v} = -\frac{2}{3}\cdot\vec{u}$

تطبيقات : إثبات استقامية ثلاث نقط أو توازي مستقيمين



(2) كيف تثبت أن ثلاثة أشعة من نفس المستوى؟



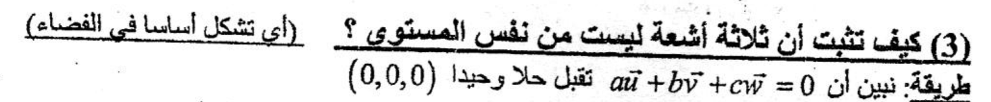
طريقة(1) : - كتابة أحد الأشعة بدلالة الشعاعين الأخرين

طريقة (2)- نبين وجود $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ بحيث : $a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{v} + c\cdot\vec{w} = \vec{0}$

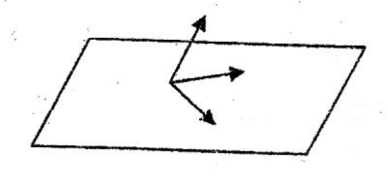
مثال : الأشعة $\vec{u}\,(1,2,3)$ و $\vec{v}\,(-2,5,4)$ و $\vec{w}\,(-4,19,18)$ هي من نفس المستوي لأن

$2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w} = 0$

تطبيق : اثبات أن 4 نقط D,C,B,A هي من نفس المستوي



(3) كيف تثبت أن ثلاثة أشعة ليست من نفس المستوى ؟ (أي تشكل أساسا في الفضاء)



طريقة: نبين أن $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$ تقبل حلا وحيدا $(0,0,0)$

مثال : $\vec{u}\,(1,2,3)$ و $\vec{v}\,(-2,5,4)$ و $\vec{w}\,(1,1,3)$ ليست من نفس المستوي لأن الجملة

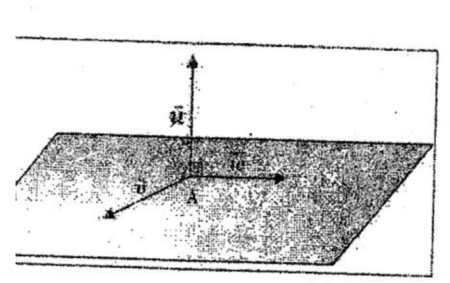
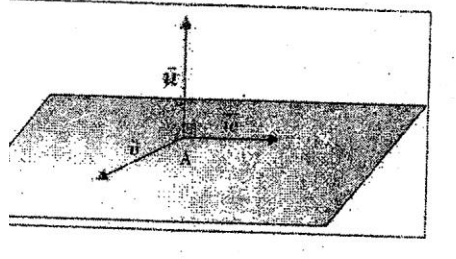
$$\begin{cases} a-2b+1c=0 \\ 2a+5b+1c=0 \\ 3a+4b+3c=0 \end{cases}$$

تقبل حلا وحيدا $(0,0,0)$

الأشعة $\vec{w},\vec{v},\vec{u}$ تشكل أساسا للفضاء

تطبيق : برهان أن 4 نقط ليست من نفس المستوي

(4) كيف تعين شعاعا $\vec{u}$ عموديا على شعاعين $\vec{v}$ و $\vec{w}$

طريقة :إذاكان $\vec{u}\,(a,b,c)$ نبحث عن حل (a,b,c) يختلف عن $(0,0,0)$ للجملة $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \\ \vec{u}\cdot\vec{w}=0 \end{cases}$

مثال : $\vec{w}\,(1,2,3)$ و $\vec{v}\,(-2,1,7)$: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ و $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$ معناه $\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ -2a+b+7c=0 \end{cases}$

نأخذ مثلا $c=1$ ونحل الجملة $\begin{cases} a+2b=-3 \\ -2a+b=-7 \end{cases}$

فنجد $a=\frac{11}{5}$ و $b=\frac{-13}{5}$ وهكذا يمكن أخذ $\vec{u}\left(\frac{11}{5},\frac{-13}{5},1\right)$ أو $\vec{u}\,(11,-13,5)$

(5)كيف تعين التمثيل الوسيطي لمستقيم معرف بنقطة وشعاع $D=(A;\vec{u})$

طريقة : (D)مستقيم يشمل نقطةA و $\vec{u}$ شعاع توجيه له، نفسر تحليليا : $M \in D$ معناه $\overrightarrow{AM} = t\cdot\vec{u}$ ،

المستقيم الذي يشمل $A\,(x_A, y_A, z_A)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}\,(a,b,c)$ له التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases}$

مثال (1) : D مستقيم يشمل $A\,(1,2,-4)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\,(6,1,-1)$. $\overrightarrow{AM} = t\cdot\vec{u}$ معناه $t \in \mathbb{R}$ ، $\begin{cases} x=1+6t \\ y=2+t \\ z=-4-t \end{cases}$

مثال (2) تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) حيث $A\,(1,2,-1)$ و $B\,(2,0,3)$

$\overrightarrow{AB}(1,-2,4)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB) ومنه $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم هو $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+2, & t\in\mathbb{R} \\ z=4t-1 \end{cases}$

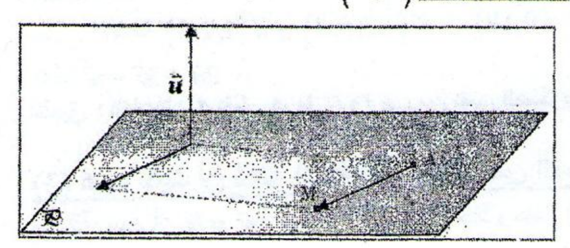
مثال (3) ليكن المستقيم (D) المعرف بالجملة $\begin{cases} x+y-2z=-5 & (1) \\ 2x+y-z=-4 & (2) \end{cases}$ عين نقطة وشعاع توجيه لهذا المستقيم ثم تمثيلا وسيطيا له

جواب : من هذه الجملة وبطرح (1) من (2) نجد : $x=1-z$ وبتعويضها في (1) نحصل : $y=-6+3z$

حلول هذه الجملة إذن هي $(1-z,-6+3z,z)$

المستقيم (D) إذن يمر من النقطة $A(1,-6,0)$ و شعاع توجيه له $\vec{u}(-1,3,1)$ والتمثيل الوسيطي له هو $\begin{cases} x=1-t \\ y=-6+3t & t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

(6) كيف تعين المعادلة الديكارتية لمستوي يمر من نقطة A و $\vec{u}$ شعاع ناظمي له؟ $P(A,\vec{u})$



طريقة : نفسر تحليليا أن $M\in P$ معناه $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$

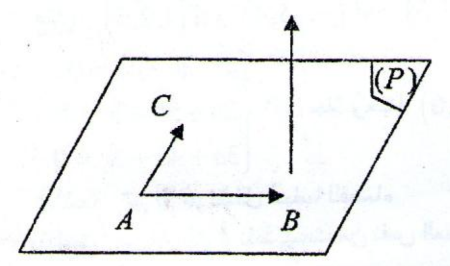
مثال : $P=(A(1,2,-4),\vec{u}(1,-3,2))$

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$ معناه $(x-1)-3(y-2)+2(z+4)=0$

ومنه معادلة P هي $x-3y+2z+13=0$

تطبيق : تعيين المستوي الذي يمس الكرة في نقطة

(7) كيف تعين معادلة ديكارتية لمستو معين بثلاث نقط A و B و C



طريقة: (أ) نبين أن النقط ليست على استقامة واحدة (ب) نعين مركبات شعاع ناظمي $\vec{n}$ بحيث $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ (ج) ثم نتبع الطريقة (6) السابقة

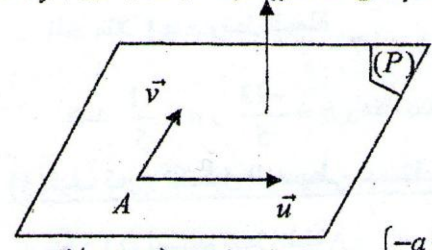
مثال : بين أن النقط $A(1,0,3)$ و $B(1,3,2)$ و $C(0,2,4)$ تمثل مستويا

الحل: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ الشعاعان غير مرتبطين خطيا (النقط ليست على استقامة واحدة) ومنه النقط تشكل مستويا

نعين شعاعا ناظميا $\vec{n}(a,b,c)$ للمستوي (ABC) : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ أي ($3b-c=0$ و $-a+2b+c=0$)

إذن $\vec{n}(5,1,3)$ ومعادلة (ABC) هي من الشكل $5x+y+3z+d=0$ وبتعويض إحداثيات إحدى النقط فيها نجد $(ABC):5x+y+3z-14=0$

(8) كيف تعين معادلة مستوي يمر من نقطة و علم أساس له؟



طريقة : نعين شعاعا ناظميا للمستوي ثم نطبق الطريقة السابقة

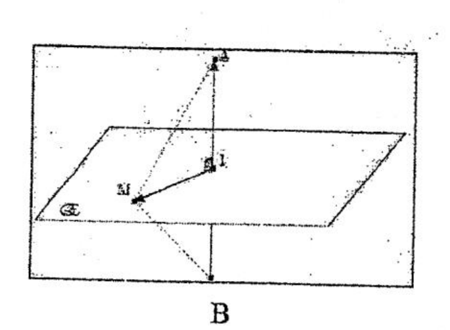
مثال : (P) المستوي الذي يشمل النقطة $A(1,-2,3)$ و $(\vec{u},\vec{v})$ اساس له حيث $\vec{u}(-1,1,4)$ و $\vec{v}(0,-3,1)$

$\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظمي لـ (P) ومنه $\vec{n}\vec{u}=0$ و $\vec{n}\vec{v}=0$ ومنه $\begin{cases} -a+b+4c=0 \\ 0a-3b+c=0 \end{cases}$ وبحل الجملة نجد $\vec{n}(13,1,3)$

ومنه معادلة (P) من الشكل $13x+y+3z+d=0$ وبما ان $A\in(P)$ نجد $d=-20$ إذن معادلة (P) $13x+y+3z-20=0$

(9) كيف تعين معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$ ؟

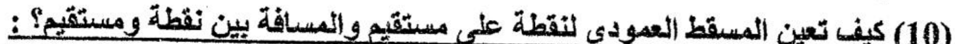
طريقة : تعيين I منتصف القطعة $[AB]$ ثم تعيين معادلة المستوي الذي يشمل I و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له



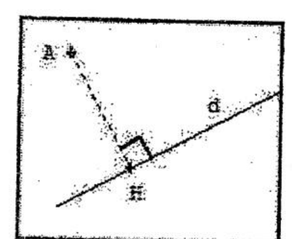
مثال : لتكن النقطتين $A\left(2,-1,2\right)$ و $B\left(0,3,6\right)$ ، لدينا $I\left(1,1,4\right)$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}$

$M\left(x,y,z\right)\in\left(P\right)$ معناه $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-4\end{pmatrix}$

ومنه معادلة $\left(P\right)$ هي $x-2y-2z+9=0$



(10) كيف تعين المسقط العمودي لنقطة على مستقيم والمسافة بين نقطة ومستقيم؟ :



طريقة : (1) لتعيين المسقط العمودي H للنقطة A على المستقيم $\left(D\right)$ نكتب إحداثيات النقطة H بدلالة t بواسطة التمثيل الوسيطي ثم إيجاد t بـ $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ وأخيرا نجد إحداثيات H

مثال: $\left(D\right)$ مستقيم تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=1-3t\\y=2+t\\z=-1-t\end{cases}$ و $A\left(-2,1,5\right)$ نقطة من الفضاء مسقطها العمودي على $\left(D\right)$ هو H

إحداثيات H تحقق الجملة $\begin{cases}x_H=1-3t\\y_H=2+t\\z_H=-1-t\end{cases}$ ، ومنه $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}3-3t\\1+t\\-6-t\end{pmatrix}$ و شعاع توجيه $\left(D\right)$ هو $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ وهذا يعني :

$-3\left(3-3t\right)+\left(1+t\right)-\left(-6-t\right)=0$ ومنه $t=\dfrac{2}{11}$ وبتعويض هذه القيمة في التمثيل الوسيطي نجد $H\left(\dfrac{5}{11},\dfrac{24}{11},\dfrac{-13}{11}\right)$

(2) ولحساب المسافة بين النقطة A والمستقيم $\left(D\right)$ نحسب المسافة AH حيث H هو المسقط العمودي للنقطة A

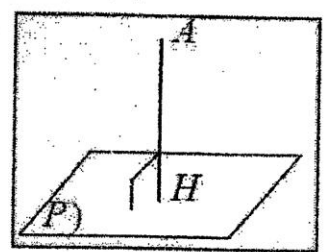
المثال السابق : $AH=\sqrt{\dfrac{502}{11}}$

(11) كيف تعين المسقط العمودي لنقطة على مستوي والمسافة بين نقطة ومستوي؟

طريقة: (1) لتعيين المسقط العمودي للنقطة A على المستوي $\left(P\right)$ نعين أولا $\vec{u}$ الشعاع الناظمي لهذا المستوي ثم نعين نقطة تقاطع المستقيم $\left(D\right)$ الذي يشمل A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له مع المستوي $\left(P\right)$

مثال : تعيين المسقط العمودي H للنقطة $A\left(1,2,-3\right)$ على المستوي $\left(P\right)$ ذو المعادلة $2x-y+5z-8=0$

حل : الشعاع الناظمي لـ $\left(P\right)$ هو $\vec{u}\left(2,-1,5\right)$ ، المستقيم $\left(D\right)$ ذي شعاع التوجيه $\vec{u}$ والذي يشمل A عمودي على $\left(P\right)$ ويقطعه في النقطة H



التمثيل الوسيطي لـ $\left(D\right)$ هو $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-3+5t\end{cases}$ وإحداثيات H تحقق الجملة

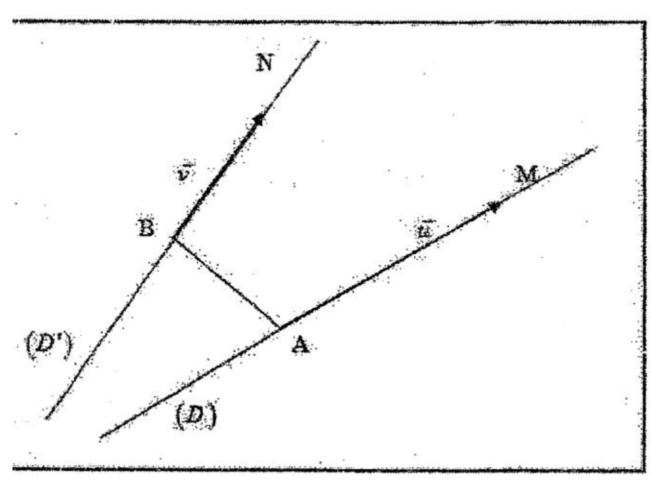
$\begin{cases}x_H=1+2t\\y_H=2-t\\z_H=-3+5t\\2x_H-y_H+5z_H-8=0\end{cases}$ و منه : $t=\dfrac{23}{30}$ و بالتالي $H\left(\dfrac{38}{15},\dfrac{37}{30},\dfrac{5}{6}\right)$

(2) المسافة بين النقطة A والمستوي $\left(P\right)$ هي المسافة بين النقطتين A و H حيث H هي المسقط العمودي لـ A على المستوي $\left(P\right)$

مثال : من المثال السابق نجد : $AH=\sqrt{\dfrac{529}{30}}$

ملاحظة : يمكن حساب المسافة بين النقطة A والمستوي $\left(P\right)$ مباشرة باستعمال العلاقة $AH=\dfrac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

(12) كيف نعين المستقيم العمودي على مستقيمين ؟ والمسافة الأصغرية بين مستقيمين؟



طريقة : (D) المستقيم ذي شعاع التوجيه $\vec{u}$ و يشمل A و (D') مستقيم يشمل B و $\vec{v}$ شعاع توجيهه .

نفكك الشعاع $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ وبما أن $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ و $\overrightarrow{BN} = \beta\vec{v}$ نكتب مركبات الشعاع $\overrightarrow{MN}$ بدلالة α و β .

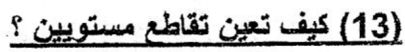
$\overrightarrow{MN}$ يجب أن يكون عموديا على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$. ومن العلاقتين $\overrightarrow{MN}\,\vec{u} = 0$ و $\overrightarrow{MN}\,\vec{v} = 0$ يتم تعيين α و β ثم النقطتين M وN ومنه MN

مثال: (D)مستقيم معرف بـ: $A\,(1,1,0)$ و $\vec{u}\,(2,0,1)$ و (D') مستقيم معرف بـ: $B\,(0,1,-3)$ و $\vec{v}\,(-1,3,1)$

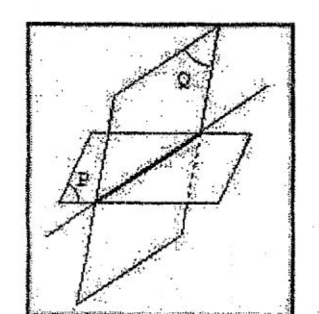
لتكن M نقطة من (D) و N نقطة من (D') ، نفكك الشعاع $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ ، وعلما أنه يوجد α و β بحيث $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ و $\overrightarrow{BN} = \beta\vec{v}$ يكون لدينا $\overrightarrow{MN} = -\alpha\vec{u} + \overrightarrow{AB} + \beta\vec{v}$ و منه مركبات $\overrightarrow{MN}$ هي $(-2\alpha-1-\beta, 3\beta, -\alpha-3+\beta)$

نحل الجملة $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\,\vec{u} = 0\\ \overrightarrow{MN}\,\vec{v} = 0\end{cases}$ فنجد : $\begin{cases}-4\alpha-2-2\beta-\alpha-3+\beta=0\\ 2\alpha+1+\beta+9\beta-\alpha-3+\beta=0\end{cases}$ إذن $\alpha = \dfrac{-19}{18}$ و $\beta = \dfrac{5}{18}$

ومنه $M\left(\dfrac{-10}{9}, 1, \dfrac{-19}{18}\right)$ و $N\left(\dfrac{-5}{18}, \dfrac{11}{6}, \dfrac{-49}{18}\right)$ وبالتالي المسافة الأصغرية بين المستقيمين هي : $MN = \dfrac{5}{\sqrt{6}}$



(13) كيف تعين تقاطع مستويين ؟



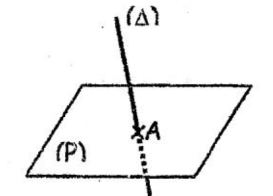
طريقة :إذا كان المستويان متقاطعين نعين تمثيلا وسيطيا لمستقيم التقاطع (D) بحل جملة المعادلتين للمستويين (P) و(P') وبوضع أحد المجاهيل كوسيط

مثال: (P): $2x - y + 3z - 4 = 0$ و (P'): $3x - 2y + 11z - 1 = 0$ كل نقطة مشتركة تحقق :

$\begin{cases}2x - y + 3z - 4 = 0\\ 3x - 2y + 11z - 1 = 0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}2x - y = 4 - 3z\\ 3x - 2y = 1 - 11z\end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases}x = 5z + 7\\ y = 13z + 10\end{cases}$ وبوضع $z = t$ نجد

$\begin{cases}x = 5t + 7\\ y = 13t + 10\\ z = t\end{cases}$ وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل $A\,(7,10,0)$ و $\vec{u}\,(5,13,1)$ شعاع توجيه له

(14) كيف تعين تقاطع مستوي ومستقيم ؟



طريقة : معادلة المستوي (P) والتمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) يشكلان جملة 4 معادلات بأربعة مجاهيل ،فنعوض x, y, z في معادلة (P) نحصل على t، إذا كنت الجملة تقبل حلا وحيدا فإن (Δ) يقطع (P) في نقطة واحدة A

مثال(1) : (Δ) تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x = 1 + t\\ y = -1 + 2t\\ z = 3t\end{cases}$ و (P) معادلته $3x - 2y + 11z - 1 = 0$

نحل الجملة $\begin{cases}x = 1 + t\\ y = -1 + 2t\\ z = 3t\\ 3x - 2y + 11z - 1 = 0\end{cases}$ نجد $\begin{cases}t = -\dfrac{1}{8}\\ x = \dfrac{7}{8}\\ y = \dfrac{-5}{4}\\ z = \dfrac{-3}{8}\end{cases}$ وبالتالي (Δ) يقطع (P) في النقطة $A\left(\dfrac{7}{8}, -\dfrac{5}{4}, -\dfrac{3}{8}\right)$

ملاحظة : إن تقاطع مستوي ومستقيم إما خال إذا كان المستقيم والمستوي متوازيان أو مستقيما إذا كان المستقيم محتوى في المستوي أو نقطة إذا كان المستقيم يقطع المستوي

مثال (2): (D) تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = t \\ y = 1-6t \\ z = 3-t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ و (P) معادلته $5x+y-z+3=0$. بالتعويض في معادلة المستوي نجد $0t=-1$

لايوجد حل . و $(1,-6,-1)\vec{u}$ شعاع توجيه (D) و $\vec{n}\,(5,1,-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) ونلاحظ $\vec{n}\,\vec{u}=0$ ومنه المستقيم يوازي المستوي وبالتالي تقاطعهما خال

مثال(3) : (D) تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-t \\ z = 1 \end{cases}$ و (P) معادلته $x+y+z=0$ بالتعويض في معادلة (P) نجد : $0t=0$.

كل قيم t هي حلول لهذه المعادلة و بالتالي كل نقط المستقيم (D) تنتمي الى المستوي (P). إذن المستقيم (D) محتوى في (P)

(15) كيف تعين تقاطع مستقيمين ؟

طريقة: نعرف المستقيمين بتمثيليهما الوسيطيين . إذاكانت الجملة من 3 معادلات لمجهولين تقبل حلا وحيدا فإن المستقيمين يتقاطعان في نقطة .

مثال (1): (D): $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 3t \end{cases}$ و (D'): $\begin{cases} x = -4+3t' \\ y = 3-8t' \\ z = -13+7t' \end{cases}$ بحل الجملة $\begin{cases} 1+t = -4+3t' \\ -1+2t = 3-8t' \\ 3t = -13+7t' \end{cases}$ نجد $t=-2$ و $t'=1$

بتعويض $t=-2$ في جملة (D) نجد $(x,y,z)=(-1,-5,-6)$ ونعوض $t'=1$ في جملة (D') نجد $(x,y,z)=(-1,-5,-6)$

إذن (D) و (D') يتقاطعان في نقطة $A\,(-1,-5,-6)$

مثال(2) $d_1 : \begin{cases} x = -2+5t \\ y = -1-t \\ z = 3+4t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $d_2 : \begin{cases} x = -7+7t' \\ y = -3t' \\ z = 2t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

$\vec{u_1}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ و $\vec{u_2}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ شعاعا توجيههما . نلاحظ أنهما غير مرتبطين خطيا و بالتالي d_1 و d_2 غير متوازيين ، فهما إما متقاطعان أو لا ينتميان

لنفس المستوي . و عليه نحل الجملة $\begin{cases} -7+7t' = -2+5t \\ -3t' = -1-t \\ 2t' = 3+4t \end{cases}$ نجد $\begin{cases} t' = 0 \\ t = -1 \end{cases}$. النقطة من d_1 من أجل $t=-1$ هي $(-7,0,-1)$ والنقطة من d_2

من أجل $t'=0$ هي $(-7,0,0)$ إذن المستقيمان d_1 و d_2 ليسا من نفس المستوي.

(16) كيف تعين تقاطع كرة مع مستقيم ؟

طريقة : لتعيين تقاطع كرة مع مستقيم معرف بتمثيله الوسيطي نعوض x, y, z في المعادلة الديكارتية للكرة ، نحصل معادلة من الدرجة الثانية ، إذا كانت تقبل حلا مضاعفا فالمستقيم مماس للكرة وإذاكانت تقبل حلين فالمستقيم يقطعها في نقطتين وإذاكانت لاتقبل حلا فالتقاطع خال

مثال : (s) كرة معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2y+4z+4=0$ و (d) مستقيم تمثيله

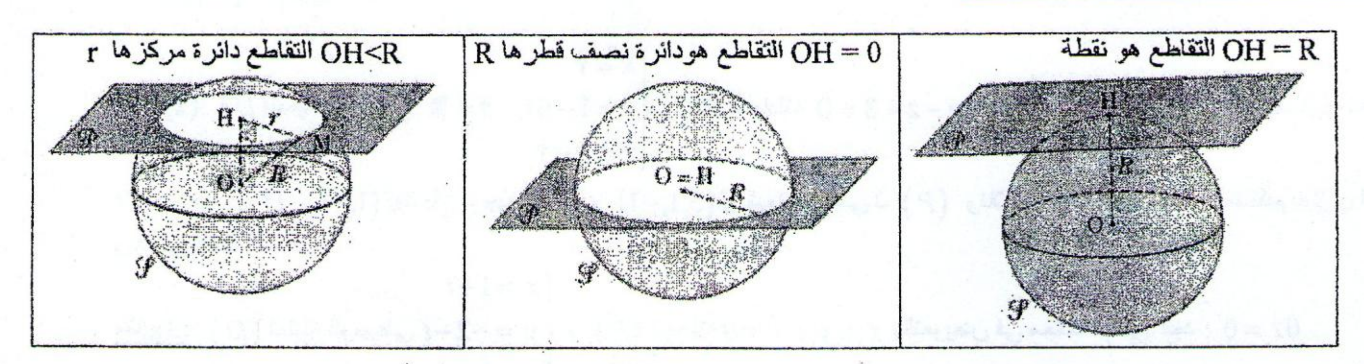
الوسيطي $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = -3+t \end{cases}$ بتعويض x, y, z في المعادلة الديكارتية للكرة نجد $6t^2+2t=0$

ومنه $t=0$ ، $t=-\frac{1}{3}$. من أجل $t=0$ نجد $x=1, y=1, z=-3$

ومن أجل $t=\frac{-1}{3}$ نجد $x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}, z=\frac{-10}{3}$

ومنه (d) يقطع (s) في نقطتين $A\,(1,1,-3)$ و $B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{-10}{3}\right)$

(16) كيف تعين تقاطع كرة مع مستوي ؟



طريقة : لدراسة تقاطع مستوي وكرة نعين المسقط العمودي H لمركز الكرة O على المستوي ثم نحسب المسافة OH ، إن تقاطع كرة ومستوي إما خال (إذا كانت المسافة أكبر من نصف قطر الكرة) وإما نقطة (إذا كان المستوي مماس للكرة) وإما دائرة (إذا كانت المسافة أقل من اوتساوي نصف قطر الكرة

مثال:نعتبر الكرة (S) التي مركزها $\omega\ (2,-1,1)$ ونصف قطرها $R=3$ ، ونعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x-2y+z+1=0$

إن المسافة بين النقطة ω والمستوي (P) هي : $d=\omega H=\frac{|2+2+1+1|}{\sqrt{1+4+1}}=\sqrt{6}$ وبما أن $R=3 \succ \sqrt{6}$ فإن (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة (c) مركزها النقطة H المسقط العمودي لـ ω على (P) ونصف قطرها r ، وبتطبيق نظرية فيثاغورس في المثلث ωHM القائم في H نجد : $R^2=r^2+d^2$ ومنه $r=\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$. و H هو نقطة تقاطع المستقيم (D) المار من ω والعمودي على (P)، ولدينا $\vec{n}\ (1,-2,1)$ هو شعاع ناظمي لـ (P) ومنه شعاع توجيه لـ (D) وبالتالي التمثيل الوسيطي لـ (D) هو : $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-2t\\z=1+t\end{cases}$ وبحل الجملة وتعويض x,y,z في معادلة (P) نجد $t=-1$ ومنه $x=1$ و $y=1$ و $z=0$ إذن تقاطع (P) و (S) هي الدائرة (c) ذات المركز $H\ (1,1,0)$ ونصف القطر $\sqrt{3}$

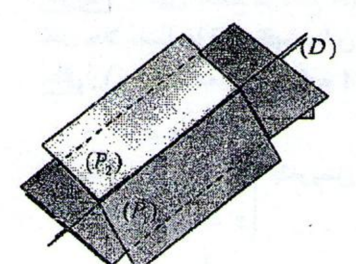
(17) كيف تعين تقاطع ثلاث مستويات ؟

طريقة : تعيين تقاطع ثلاث مستويات يعود الى حل جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل . التقاطع قد يكون :
خاليا أو نقطة (إذاكانت الجملة تقبل حلا وحيدا) أو مستقيما (إذاكانت الجملة تقبل عددا غير منته من الحلول مكتوبة بدلالة وسيط وحيد) أو مستويا (إذا كانت المستويات متطابقة)

مثال : $(P_1)\ :\ 4x+y+z+10=0$ ، $(P_2)\ :\ 2x+y+3=0$ ، $(P_3)\ :\ 2x-y+2z-1=0$

$\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ أشعة ناظمية لــ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب

ليست مرتبطة خطيا مثنى مثنى و بالتالي فالمستويات متقاطعة مثنى مثنى وفق مستقيم



(أ) تقاطع (P_1) ، (P_2) : ليكن (D) مستقيم تقاطعهما $\begin{cases}4x+y+z+10=0\\2x+y+3=0\end{cases}$

نضع z = t لنحصل على تمثيل وسيطي لــ (D) و هو $t\in\mathbb{R};\begin{cases}x=t\\y=-3-2t\\z=-7-2t\end{cases}$

(ب) تقاطع (D) و (P_3) : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه لــ(D) ونلاحظ أن $\vec{u}.\overrightarrow{n_3}=0$ إذن (D) يوازي (P_3) .

A(0 ; -3 ; -7) نقطة من (D) ولكن $(A\notin(P_3))$ و بالتالي $(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$